Sous-groupe additif générique d'un corps algébriquement clos de caractéristique positive.

Christian d'Elbée

1. **Prédicat générique.** [Chatzidakis-Pillay 98] T $\mathscr{L}$-théorie modèle complète elimine $\exists^\infty$. La $\mathscr{L} \cup \{P\}$-theorie T, admet une modèle compagne TP. Si T est simple, TP aussi.
2. **Expansion générique.** T $\mathscr{L}$-theorie modèle complète, $\mathscr{L} \subset \mathscr{L}'$, est-ce que T en tant que $\mathscr{L}'$-theorie (incomplète) admet une modèle compagne $T_{\mathscr{L}'}$?
   - OUI : si (et seulement si) T élimine $\exists^\infty$ [Winkler 1975]
   - Si T est $NSOP_1$ alors $T_{\mathscr{L}'}$ aussi [Kruckman-Ramsey 2018]. ([Jeřábek 2018] for $T^\emptyset_{\mathscr{L}'}$)

On fixe $p > 0$ premier. $\mathbb{F}_p$ corps à p éléments, $\overline{\mathbb{F}}_p$ sa clôture algébrique.
Soit $\mathscr{L} = \{+, -, \cdot, ^{-1}, 0, 1\}$ et $\mathscr{L}^G = \mathscr{L} \cup \{G\}$, G prédicat unaire.
Soit ACF_p^G la $\mathscr{L}^G$-theorie dont les modéles (F, H) satisfont:

- $F \models ACF_p$;
- $H = G(F)$ est un sous-groupe additif de F.

Théorème

ACF_p^G admet une modèle compagne, on la note ACF_pG.

- *Tout modèle d' ACF_p^G se plonge dans un modèle d'ACF_pG;*
- *Tout modèle d'ACF_pG est existentiellement clos dans tout modèle d'ACF_p^G qui l'étend.*

ACF_pG est une axiomatique des modèles existentiellement clos d'ACF_p^G.

Lemme (Chatzidakis-Pillay)

Si T élimine $\exists^\infty$ alors pour toute formule $\phi(x,y)$ il existe une formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout uplet b de $\mathscr{M} \models T$ on ait

$$\mathscr{M} \models \theta_\phi(b) \iff \text{il existe un uplet } a \text{ de } \mathscr{N} \succ \mathscr{M} \text{ tel que } a \cap \mathscr{M} = \emptyset \text{ et } \mathscr{N} \models \phi(a,b)$$

Dans notre cas: Pour toute $\mathscr{L}$-formule $\phi(x,y)$ il existe une fornule $\theta_\phi(y)$ telle que $K \models ACF_p$ et pour tout uplet b de K

$$K \models \theta_\phi(b) \iff \text{il existe un uplet } a \text{ d'une extension de } K \text{ tel que } a \text{ est } \mathbb{F}_p\text{-linéairement indépendant sur } K \text{ et } \models \phi(a,b)$$

Cette formule n'est *pas* uniforme en p.

On note $\langle a \rangle$ l'espace vectoriel sur $\mathbb{F}_p$ engendré par a. La théorie ACF_pG est obtenue en ajoutant à ACF_p le schéma d'axiome suivant: pour toute $\mathscr{L}$-formule $\phi(x, y)$, $x' \subseteq x$, $y' \subseteq y$:

$$\forall y \left(\theta_\phi(y) \wedge \langle y' \rangle \cap G = \{0\} \rightarrow \exists x(\phi(x, y) \wedge \langle xy' \rangle \cap G = \langle x' \rangle)\right)$$

Pas uniforme en p.
Complétions. Pour deux modèles (K_1, G_1) et (K_2, G_2) de ACF_pG,

$$(K_1, G_1) \equiv (K_2, G_2) \iff (\overline{\mathbb{F}}_p, G_1(\overline{\mathbb{F}}_p)) \text{ et } (\overline{\mathbb{F}}_p, G_2(\overline{\mathbb{F}}_p)) \text{ sont } \mathscr{L}^G - \text{isomorphes.}$$

Clôture algébrique. La clôture algébrique dans ACF_pG est donnée par la clôture algébrique au sens d'ACF_p.

Proposition

Pour tout $n \in \mathbb{N}$ et G_0 sous-groupe fini $\mathbb{F}_{p^n}$ il existe $G_0 \subset G \subset \overline{\mathbb{F}}_p$ tel que $(\overline{\mathbb{F}}_p, G) \models ACF_pG$.

Soit $\mathscr{U}$ un ultrafiltre non principal sur l'ensemble des nombres premiers, et un modèle $(\overline{\mathbb{F}}_q, G_q)$ de ACF_qG, pour tout premier q. Qu'est-ce que c'est que

$$\prod_{q \in \mathscr{U}} (\overline{\mathbb{F}}_q, G_q) \text{ ?}$$

Remarque (Caractéristique 0 ?)

Si (K, G) est un modèle existentiellement clos de la classe des structures (K, G) avec $car(K) = 0$, alors $Stab(G) = \mathbb{Z}$. ***Pas*** *axiomatisable.*

Definition

Soit T une théorie et $\phi(x,y)$ une formule dans le langage de T.

1. *On dit que $\phi(x,y)$ a la propriété forte de l'ordre 1 (SOP_1) s'il existe un arbre d'uplets $(b_\eta)_{\eta\in 2^{<\omega}}$ tel que*
    - *pour tout $\eta \in 2^\omega$ $\{\phi(x, b_{\eta\restriction\alpha} \mid \alpha < \omega\}$ est consistant*
    - *pour tout $\eta, \nu \in 2^{<\omega}$ si $\eta^\frown 0 \lhd \nu$ alors $\{\phi(x, b_\nu), \phi(x, b_{\eta^\frown 1}\}$ est inconsistant.*
2. *On dit que $\phi(x,b)$ Kim-divise sur A s'il existe une extension globale A-invariante $p(x)$ de $tp(b/A)$ et $(b_i)_{i<\omega}$ telle que $b_i \models p \restriction Ab_{<i}$ et $\bigwedge_{i<\omega} \phi(x,b_i)$ est inconsistant.*
3. *On dit que $\phi(x,b)$ Kim-dévie sur A si $\phi(x,b)$ implique une disjonction finie de formule qui Kim-divise sur A.*
4. *On définit la Kim-indépendence*

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{K}_{C} B \iff tp(A/BC) \text{ ne Kim-dévie pas sur } C.$$

ACF_pG dans la carte de l'univers
$NSOP_1$, NTP_2

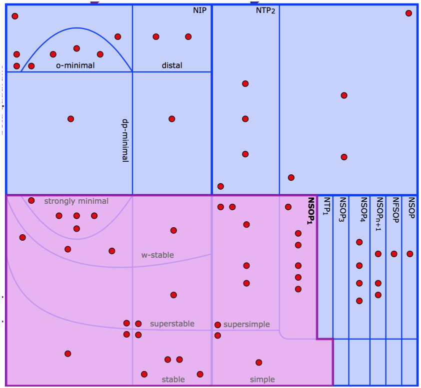

Figure: NSOP1

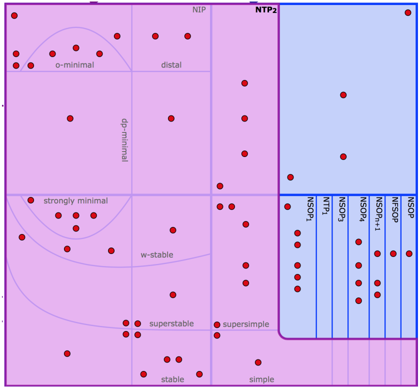

Figure: NTP2

G. Conant *Map of the Universe* http://www.forkinganddividing.com

Soit $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\,$ une relation ternaire dans T stable par automorphisme.

- **Symmétrie**.
  Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} B$ alors $B \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} A$.
- **Monotonicité**.
  Si $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} BD$ alors $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} B$.
- **Existence**.
  Pour tout modèle $\mathscr{M}$ et a on a $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} \mathscr{M}$
- **Caractère fini fort**. Pour tout modèle $\mathscr{M}$, si $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} b$ alors il existe une formule $\phi(x, b, m) \in tp(a/b\mathscr{M})$ telle que pour tout a', si $a' \models \phi(x, b, m)$ alors $a' \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} b$.
- **3-amalgamation**.
  Pour tout modèle $\mathscr{M}$ s'il existe c_1, c_2 et A, B tels que
  - $c_1 \equiv_{\mathscr{M}} c_2$
  - $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} B$
  - $c_1 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} A$ et $c_2 \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} B$

  alors il existe $c \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{\mathscr{M}} A, B$ tel que $c \equiv_{\mathscr{M}A} c_1$ et $c \equiv_{\mathscr{M}B} c_2$.
- **Témoignage (Witnessing)**.

Critère à la Kim-Pillay pour $NSOP_1$

Chernikov-Ramsey (2015) ; Kaplan-Ramsey (2017)

- Symmetrie.
- Monotonicité.
- Existence.
- Caractère fini fort.
- 3-amalgamation.

$NSOP_1$

- Témoignage.

$\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}\nolimits^K$

- Monotonicité sur la base.

$\boxed{\text{Simple}}$

Pour A, B, C algébriquement clos dans un modèle d'ACF_pG

$$A \mathop{\downfree}\nolimits^{w}_{C} B \iff A \mathop{\downfree}\nolimits^{ACF}_{C} B \text{ et } G(\overline{AC}+\overline{BC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

$$A \mathop{\downfree}\nolimits^{st}_{C} B \iff A \mathop{\downfree}\nolimits^{ACF}_{C} B \text{ et } G(\overline{ABC}) = G(\overline{AC}) + G(\overline{BC})$$

Théorème

- $\downfree^{w}$ *satisfait **Symmetrie**, **Monotonicité**, **Existence**, **Caractère fini fort**, 3-**amalgamation** donc ACF_pG est $NSOP_1$. Elle satisfait aussi **Témoignage**, donc $\downfree^{w}$ coincide avec Kim-indépendence au dessus des modèles. $\downfree^{w}$ ne satisfait pas **Monotonicité sur la base**, donc ACF_pG n'est pas simple.*
- $\downfree^{st}$ *satisfait toutes les propriétés sauf **Caractère fini fort** et **Témoignage**.*

Caractère fini fort. $C = \overline{C}$, si $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{w}_{C} b$ alors il existe une formule $\phi(x, b, c) \in tp(a/bC)$ telle que pour tout a', si $a' \models \phi(x, b, c)$ alors $a' \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!|}^{w}_{C} b$.

Remarque (3-amalgamation, Chatzidakis-Hrushovski)

Si A, B, C, E sont algébriquement clos, A, B, C contiennent E, avec $C \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\,^{ACF}_{E} A, B$ alors

$$(\overline{AC} + \overline{BC}) \cap \overline{AB} = A + B$$

Remarque ($\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\,^{w}$ ne satisfait *pas* Monotonicité sur la base)

Soit (K, G) un modéle saturé d'ACF_pG.

1. *Il existe a, b, c algébriquement indépendants sur $\overline{\mathbb{F}}_p$ tels que $G(\overline{\mathbb{F}_p(a, b, c)}) = G(\overline{\mathbb{F}}_p) + \langle a \cdot b + c\rangle$.*
2. $G(\overline{\mathbb{F}_p(a)} + \overline{\mathbb{F}_p(b, c)}) = G(\overline{\mathbb{F}_p(a)}) = G(\overline{\mathbb{F}_p(a, b)}) = G(\overline{\mathbb{F}_p(b, c)}) = G(\overline{\mathbb{F}}_p)$ *et* $G(\overline{\mathbb{F}_p(a, b)} + \overline{\mathbb{F}_p(b, c)}) = G(\overline{\mathbb{F}}_p) + \langle a \cdot b + c\rangle$.
3. $a \mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\,^{w} b, c$ *et* $a \not\mathop{\smile\!\!\!\!\!\mid}\,^{w}_{b} c$.

Remarque (Plus de propriétés pour $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$)

*En fait, toutes les propriétés satisfaites par $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$ sont satisfaites sur des ensembles algébriquement clos. De plus, $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ et $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$ satisfont **Caractère fini**, **Extension** et **Transitivité**. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{w}$ satisfait **Caractère Locale** mais $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$ ne la satisfait pas. $\mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}^{st}$ est stationnaire au dessus des ensembles algébriquement clos.*

Caractère Locale. Pour tout A denombrable et B quelconque, il existe un ensemble denombrable $B_0 \subseteq B$ tel que

$$A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!|}_{B_0} B.$$

Pour $(K, G) \models ACF_pG$, on considère

$$\pi : K \to K/G.$$

Soit $(K, K/G)$ la structure à 2 sorte, une pour le corps K, une pour le $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel K/G, et la projection canonique $\pi : K \to K/G$. Cette structure est interdéfinissable avec (K, G) donc $NSOP_1$. On peut décrire la Kim-indépendence dans cette structure à deux sortes.

Théorème

$(K, K/G)$ a l'élimination faible des imaginaires.

Déviation et Monotonicité sur la base

$$A \underset{C}{\overset{wmon}{\downfree}} B :\iff \forall D \subseteq \overline{BC}\ A \underset{CD}{\overset{w}{\downfree}} B.$$

$\overset{f}{\downfree}$ / $\overset{d}{\downfree}$ / $\overset{þ}{\downfree}$ = relation d'indépendence de la non deviation/division/thorn-deviation.

Proposition

1. $\overset{wmon}{\downfree}$ *ne satisfait pas le caractère locale.*
2. ACF_pG *n'est pas épineuse* ($\overset{þ}{\downfree} \restriction K \to \overset{wmon}{\downfree}$).
3. *Soient* A, B, C, D *algébriquement clos,* A, B, D *contenant* C, $B \subseteq D$.

$$si\ A \underset{C}{\overset{wmon}{\downfree}} B \text{ et } A \underset{B}{\overset{st}{\downfree}} D \text{ alors } A \underset{C}{\overset{wmon}{\downfree}} D.$$

4. $\overset{wmon}{\downfree} = \overset{f}{\downfree} = \overset{d}{\downfree} = \overset{þ}{\downfree} \restriction K$.

Généralisation de la construction

Soient $\mathscr{L}_0 \subseteq \mathscr{L}$, T une $\mathscr{L}$-theorie complète et $T_0 = T \upharpoonright \mathscr{L}_0$. Soit $\mathscr{L}^S = \mathscr{L} \cup \{S\}$, S un prédicat unaire et soit T^S la $\mathscr{L}^S$-théorie dont les modèles sont composés d'un modèle $\mathscr{M}$ de T dans lesquels $S(\mathscr{M})$ est une $\mathscr{L}_0$-sous structure de $\mathscr{M} \upharpoonright \mathscr{L}_0$ modèle de T_0.

Existence d'une modèle compagne pour T^S.

1. T modèle-complète et T_0 a l'élimination des quantificateurs dans $\mathscr{L}_0$
2. T_0 géométrique et modulaire
3. pour toute $\mathscr{L}$-formule $\phi(x, y)$ il existe une $\mathscr{L}$-formule $\theta_\phi(y)$ telle que pour tout modèle $\mathscr{M}$ de T et $b \in \mathscr{M}$

$$\mathscr{M} \models \theta_\phi(b) \iff \begin{array}{l} \text{il existe } \mathscr{N} \succ \mathscr{M} \text{ et un uplet } a \text{ de } \mathscr{N} \\ \text{tels que } a \text{ est indépendant } \mathscr{M} \\ (\text{pour la prégéométrie } acl_0) \text{ et } \mathscr{N} \models \phi(a, b) \end{array}$$

Alors T_S admet une modèle compagne, on la dénote TS.

Existence d'une modèle compagne

Exemple

- ***Sous-espace vectoriel générique sur $\mathbb{F}_{p^n}$.*** *Pour toute théorie modèle complète de $\mathbb{F}_{p^n}$-espace vectoriel qui élimine $\exists^\infty$, on peut ajouter des sous $\mathbb{F}_{p^n}$-espaces vectoriels génériques. Par exemple ACF_p, Psf_p, DCF_p, $ACFA_p$, PAC_p....*
- ***Sous-groupe multiplicatif.*** *Prédicat pour un sous-groupe multiplicatif générique d'un corps algébriquement clos de caractéristique $p \geq 0$ (pour $p > 0$ on peut ajouter sous-groupe additif et sous-groupe multiplicatif générique).*

Généralisation de la construction

Conservation de $NSOP_1$

T est $NSOP_1$ et la Kim-indépendance satisfait : pour tout A, B, C algébriquement clos et Kim-indépendant sur $\mathscr{M}$, on a

$$acl_0(acl_T(AC), acl_T(BC)) \cap acl_T(AB) = acl_0(A, B)$$

Alors si TS existe, TS est $NSOP_1$. LASSE:

1. TS n'est pas simple
2. T n'est pas simple ou il existe A, B, C, D algébriquement clos tels que A, B, D contiennent C et $A \mathop{\smile\!\!\!\!\!\!\,|}^K_C BD$, tels que

$$acl_0(A, acl_T(BD)) \cup acl_T(AD) \neq acl_0(acl_T(AD), acl_T(BD)).$$

Exemple

Tous les exemples sont $NSOP_1$.

The end

Merci ;)